Représentation de nombres réels par suites d'entiers et équations différentielles

Laurent Fuchs

Laurent.Fuchs@univ-poitiers.fr

XLIM-ASALI
Équipe IG
Université de Poitiers

Poitiers, 19 Novembre 2025

Actuellement

- Gaëlle Largeteau-Skapin, U. de Poitiers,
- Loïc Mazo, U. de Strasbourg,
- Marie-Andrée Da Col, U. de Strasbourg,
- Nicolas Magaud, U. de Strasbourg,
- Laurent Fuchs U. de Poitiers..

Alumni

- Éric Andres, U. de Poitiers,
- Guy Wallet, U. de La Rochelle,

L'équipe

Poitiers, Strasbourg (et La Rochelle)

Thésards

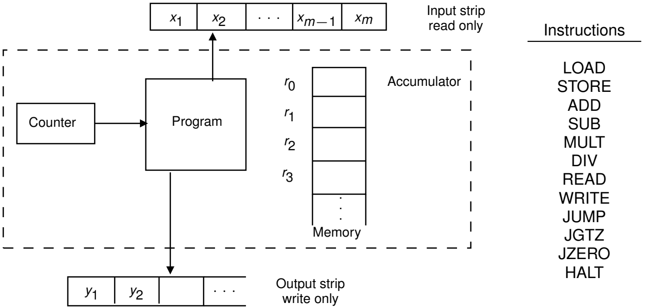
- A. Chollet, U. de La Rochelle, 2010,
  A. Richard, U. de Poitiers, 2011

Étudiants de Master

- F. Geniet (Poitiers 2020), É. Ancelin (Poitiers 2019), É. Lequentrec (Strasbourg 2015), D. Braun (Strasbourg 2014)

On a rapidement des soucis

- Conception et analyse d'algorithme Modèle de calculs :
    - Real RAM (Random Access Machine) ; Register machine with exact real arithmetic.



Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).
- Théories du calcul des réels, deux approches :

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).
- Théories du calcul des réels, deux approches :
  - Analytique ; généraliser le concept de calcul, machine de Turing
    - Au moins 6 versions différentes ; TTE, domaines continus, espaces métriques (Analyse calculable)

J. V. Tucker and J. I. Zucker.
Abstract computability and algebraic specification.
ACM Transaction on Computational Logic 3(2), 2002.

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).
- Théories du calcul des réels, deux approches :
    - Analytique ; généraliser le concept de calcul, machine de Turing
        - Au moins 6 versions différentes ; TTE, domaines continus, espaces métriques (Analyse calculable)

K. Weihrauch.
Computable Analysis, An Introduction.
Springer Verlag, 2000.

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).
- Théories du calcul des réels, deux approches :
  - Analytique ; généraliser le concept de calcul, machine de Turing
    - Au moins 6 versions différentes ; TTE, domaines continus, espaces métriques (Analyse calculable)
    - En 1999 Bridges propose une axiomatique constructive de la droite réelle.

Douglas S. Bridges.
Constructive mathematics: a foundation for computable analysis.
Theoretical Computer Science, 219:95–109, 1999.

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).
- Théories du calcul des réels, deux approches :
  - Analytique ; généraliser le concept de calcul, machine de Turing
    - Au moins 6 versions différentes ; TTE, domaines continus, espaces métriques (Analyse calculable)
    - En 1999 Bridges propose une axiomatique constructive de la droite réelle.
  - Algébrique ; les nombres réels sont vu comme des objets atomiques
    - Real RAM, théorie de Blum, Shub et Smale (BSS).

Blum, L. and Shub, M. and Smale, S..
On a theory of computation and complexity over the real numbers.
Bulletin of American Mathematical Society, 21, 1989.

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes (géométriques).
- Théories du calcul des réels.
- Théorie du « Exact Geometric Computing » (EGC).
  - Une théorie algébrique munie d'une notion d'approximation relative
    - L'idée est de rendre calculable des fonctions non continues.
    - EGC développée d'abord de façon empirique en informatique géométrique, prédicats géométriques exacts de la géo. algo.

Chee, K. Yap.
Theory of real computation according to EGC.
Reliable Implementation of Real Number Algorithms: Theory and Practice, LNCS 5045, 2008.

Différentes façons d'aborder le problème

- Se donner les moyens d'un calcul : développer une théorie du calcul réel adapté aux algorithmes géométriques.
- Théories du calcul des réels.
- Théorie du « Exact Geometric Computing » (EGC).
- Théorie Basée sur les domaines de Scott.
  - Un objet calculable ; limite effective de 2 suites monotones d'objets finis qui fournissent à chaque étape des bornes sup. et inf. pour l'objet.
  - Rendre (Scott-) continues les opérations de l'informatique géométrique ; appartenance, inclusion, . . ., elles sont alors calculables.

Edalat, A. and Lieutier, A..
Foundation of a computable solid modeling.
Theoretical Computer Science, 284(2), 2002.

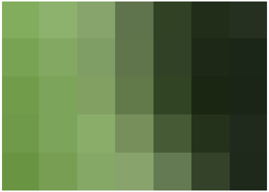
A. Edalat , A. A. Khanban , and A. Lieutier.
Computability in Computational Geometry
LNCS 30526, 2005.

- Oublier le continu : Géométrie Discrète

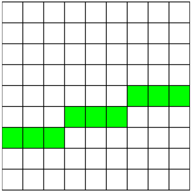
Motivation

Calculs avec des nombres entiers

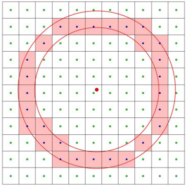
- Oublier le continu : Géométrie Discrète
  - Monde « naturel » des images numériques.
    - Partir du fait que les données acquises sont discrètes



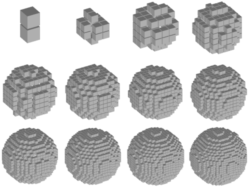
- Oublier le continu : Géométrie Discrète
  - Monde « naturel » des images numériques.
    - Partir du fait que les données acquises sont discrètes
  - Reconstruire une géométrie, une topologie en n'utilisant que des entiers.



Droite discrète

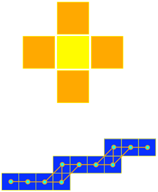


Cercle discret

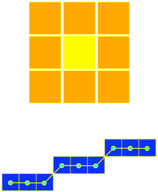


Sphères discrètes

- Oublier le continu : Géométrie Discrète
  - Monde « naturel » des images numériques.
    - Partir du fait que les données acquises sont discrètes
  - Reconstruire une géométrie, une topologie en n'utilisant que des entiers.

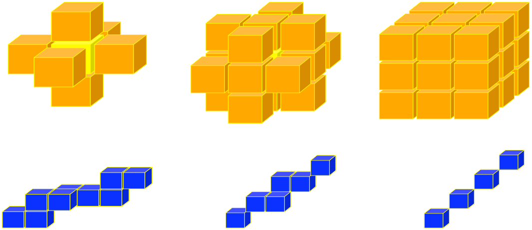


4-connexité



8-connexité

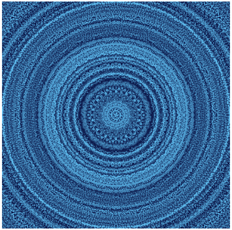
- Oublier le continu : Géométrie Discrète
  - Monde « naturel » des images numériques.
    - Partir du fait que les données acquises sont discrètes
  - Reconstruire une géométrie, une topologie en n'utilisant que des entiers.

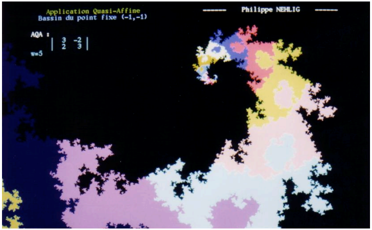


Motivation

Calculs avec des nombres entiers

- Oublier le continu : Géométrie Discrète
  - Monde « naturel » des images numériques.
    - Partir du fait que les données acquises sont discrètes
  - Reconstruire une géométrie, une topologie en n'utilisant que des entiers. Revoir aussi les transformations géométriques.

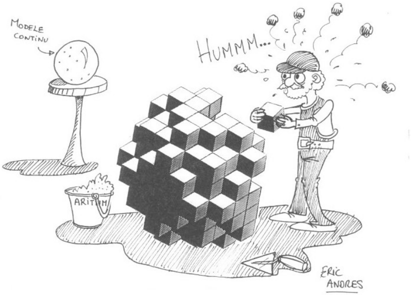




Motivation

Calculs avec des nombres entiers

- Oublier le continu : Géométrie Discrète
  - Monde « naturel » des images numériques.
    - Partir du fait que les données acquises sont discrètes
  - Reconstruire une géométrie, une topologie en n'utilisant que des entiers. Revoir aussi les transformations géométriques.
  - Savoir gérer le passage du continu au discret



Motivation

- En fait on cherche à résoudre 2 problèmes :
  - Développer une approche ayant un contenu algorithmique
  - Comprendre comment tenir compte de quantités qui ne sont pas directement accessibles.

Notre approche

- La droite de Harthong-Reeb comme un modèle du continu :
  - Des suites d'entiers (arithmétique de Laugwitz et Schmieden)
  - une façon de définir les nombres réels qui peuvent être calculés (l'axiomatique de la droite réelle constructive de Bridges).

Définition

- On considère les suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_n \in \mathbb{Z}$.
- On définit une relation d'équivalence sur ces suites

$$a = b \text{ s'il existe } N \in \mathbb{N} \text{ rel que } \forall n > N,\ a_n = b_n.$$

- Un Ω-*nombre* a est une classe d'équivalence par rapport à la relation d'égalité. L'ensemble des Ω-nombres est noté par $\mathbb{Z}_\Omega$.

Exemples

- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$ représente l' Ω-nombre 2.
- $(1, 5, 4, 2, 2, 2, \ldots) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$ sont dans la même classe d'équivalence.

Opérations et relations sur $\mathbb{Z}_\Omega$:

- $a + b =_{def} (a_n + b_n)$ et $-a =_{def} (-a_n)$ et $a \times b =_{def} (a_n \times b_n)$,
- $a > b =_{def} [(\exists N\ \forall n > N)\ a_n > b_n]$ et
  $a \geqslant b =_{def} [(\exists N\ \forall n > N)\ a_n \geqslant b_n]$,
- $|a| =_{def} (|a_n|)$.

On peut distinguer deux classes d'éléments :

- $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est standard si $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que
  $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ a_n = p$
- $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infiniment grand si (a_n) est croissante
  $(\lim a_n \simeq +\infty)$.

On considère l'ensemble

$$\mathcal{HR}_\omega = \{X \in \mathbb{Z}_\Omega,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |X| \leq n\omega\}$$

muni des opérations suivantes avec $X = (x_m)$ et $Y = (y_m)$ dans $\mathcal{HR}_\omega$:

- $X =_\omega Y \Leftrightarrow$ pour tout n dans $\mathbb{N},\ n|X - Y| \leq \omega$ (i.e. $(X - Y) \in o(\omega)$)
- $X >_\omega Y \Leftrightarrow$ il existe un n dans $\mathbb{N},\ n(X - Y) \geq \omega$
- $X +_\omega Y =_{def} X + Y$.
- $X \times_\omega Y =_{def} \lfloor XY/\omega \rfloor$.
- $0_\omega =_{def} 0$ et $1_\omega := \omega$.
- $-_\omega X =_{def} -X$.
- Si X est tel que $X \neq_\omega 0 \quad X^{(-1)_\omega} =_{def} \left\lfloor \frac{\omega^2}{X} \right\rfloor$.

- Les nombres réels sont représentés par des suites d'entiers.
- On utilisera que ces suites d'entiers pour les calculs.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\underset{+,\ \times,\ /}{\mathbb{R}_{lim}} \arrow[r, shift left, "\psi_\omega(x) = \lfloor x\omega \rfloor"] & \underset{+_\omega,\ \times_\omega,\ /_\omega}{HR_\omega} \arrow[l, shift left, "\phi_\omega(X) = \frac{X}{\omega}"]
\end{tikzcd}
$$

- Les éléments d'une suite d'entiers représentent un nombre réel à différentes échelles.

Arithmétisation du schéma d'Euler

Le schéma d'Euler

- Équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$, avec la condition initiale $x(a) = b$.
- On pose $1/\beta$ le pas d'incrément,

$$(\star)\left\{\begin{array}{l} t_0 = a,\ x_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + 1/\beta \\ x_{n+1} = x_n + 1/\beta * f(t_n, x_n) \end{array}\right.$$

Discrétisation du schéma d'Euler (utilisation de $\psi_\omega : \mathbb{R}_{lim} \longrightarrow \mathcal{HR}_\omega$)

$$(\star\star)\left\{\begin{array}{l} T_0 = \lfloor a\,\omega \rfloor,\ X_0 = \lfloor b\,\omega \rfloor \\ T_{n+1} = T_n + \beta \\ X_{n+1} = X_n + F_n(T_n, X_n) \div \beta \end{array}\right.$$

où $\omega = \beta^2$ et $F_n(T_n, X_n) := \lfloor \omega f(T_n/\omega, X_n/\omega) \rfloor$.

Arithmétisation du schéma d'Euler

Une dernière étape pour obtenir une suite connectée

Pour tout $X \in \mathcal{HR}_\omega$, on définit $X = \widetilde{X}\beta + \widehat{X}$ avec

- $\widetilde{X} \in \mathcal{HR}_\beta$
- $\widehat{X} \in \{0,\ 1,\ \ldots\ \beta - 1\}$

$$(\star\star\star)\begin{cases} \widetilde{T}_0 = A \div \beta,\ \widetilde{X}_0 = B \div \beta,\ \widehat{X}_0 = B \mod \beta \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \mod \beta \end{cases}$$

$\widetilde{T}_n$, $\widetilde{X}_n$ et β sont dans $\mathbb{Z}_\Omega$ (suites $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ β est une suite d'échelles.

- La fonction $\widetilde{T} \mapsto \widetilde{X}(\widetilde{T})$ définie par $(\widetilde{T}_n, \widetilde{X}_n)$ est définie sur un domaine connexe car $\widetilde{T}_{n+1} - \widetilde{T}_n = 1$.

$$
\begin{array}{|c|c|l|}
\hline
\widetilde{X}_{n+1} & = & \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \div \beta \\
\hline
\widetilde{x}_{0,n+1} & = & \widetilde{x}_{0,n} + (\widehat{x}_{0,n} + \widetilde{f}_{0,n}) \div \beta_0 \\
\widetilde{x}_{1,n+1} & = & \widetilde{x}_{1,n} + (\widehat{x}_{1,n} + \widetilde{f}_{1,n}) \div \beta_1 \\
\widetilde{x}_{2,n+1} & = & \widetilde{x}_{2,n} + (\widehat{x}_{2,n} + \widetilde{f}_{2,n}) \div \beta_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\widetilde{x}_{m,n+1} & = & \widetilde{x}_{m,n} + (\widehat{x}_{m,n} + \widetilde{f}_{m,n}) \div \beta_m \\
\vdots & & \vdots \\
\hline
\end{array}
$$

- Il reste à régler le problème du nombre de points à calculer sur le domaine.
- Il faut avoir un nombre de points du même ordre que β.

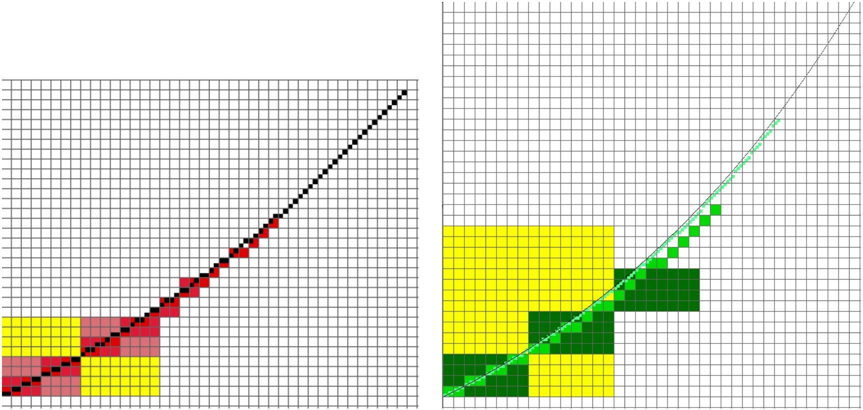
Arithmétisation du schéma d'Euler

Ω-iterations

- Pour un domaine échantillonné $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ où $N \in \mathbb{N}$, on n'a pas assez de points car :
  - $(t_N - t_0 = N =_\beta 0)$
- Ω-iterations ;
  - $N = (N_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_\Omega$, on a N_m échantillons au niveau m.
- Ainsi, pour $\tau \in \mathcal{HR}_\beta$, $\widetilde{x}_m(\tau)$ est obtenu après $(\tau_m - t_{0,m})$ échantillons.
- Le nombre d'échantillons croît avec le niveau m.

Arithmétisation du schéma d'Euler

Représentation multi-résolution de fonctions



Arithmétisation du schéma d'Euler

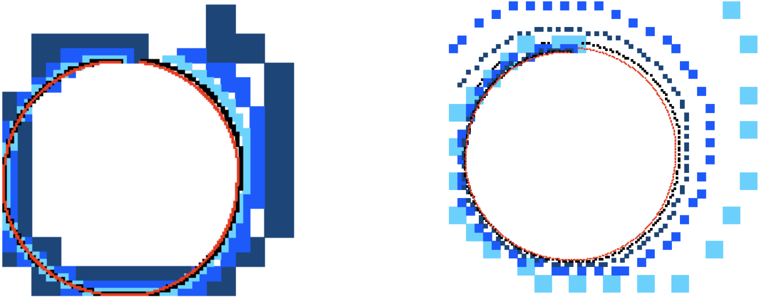
Représentation multi-résolution de fonctions

- On obtient des représentation exactes des fontions, au sens où la solution obtenue par l'arithmétisation contient autant d'information que la solution "continue".

A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, E. Andres and G. Largeteau-Skapin.
Foundational aspects of multiscale digitization.
Theoretical Computer Science, 466, 2012.

Arithmétisation du schéma d'Euler

Calcul d'arcs de cercle



The Bridges' axioms

- In 1999, Douglas Bridges introduced an axiomatic presentation of the constructive real line.
  - It is a system $(R, +, \times, =, >, 0, 1, \mathrm{Opp}, \mathrm{Inv})$ which satisfies a list of 17 axioms.
  - Let us call a Bridges-Heyting ordered field any system which satisfies these axioms.
- These axioms are organized into 3 groups:
  - The first is dedicated to the algebraic operations,
  - The second to the order structure
  - The third to the usual Archimedes' axiom and to a constructive least-upper bound principle.

Un mot sur les aspects théorique

La droite d'Harthong-Reeb $\mathcal{HR}_\omega$ construite sur les Ω-nombres ne vérifie pas la totalité des axiomes de Bridges-Heyting.

Trois axiomes (sur 17) ne sont que partiellement pas vérifiés :

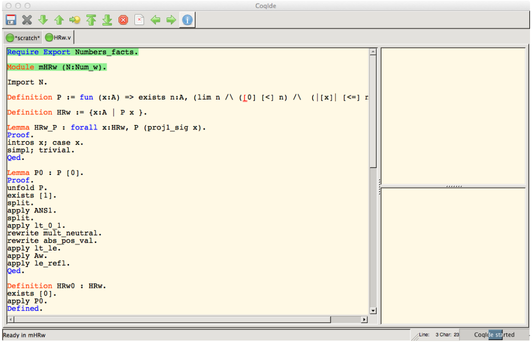
- A2.2 $\forall x, y, z \in \mathcal{HR}_\omega \;\; (x >_\omega y) \Rightarrow \forall z \;\; ((x >_\omega z) \vee (z >_\omega y))$
- A2.3 $\forall x, y, \in \mathcal{HR}_\omega, \quad \neg(x \neq_\omega y) \Rightarrow x =_\omega y$
- A3.1 Axiome de la borne supérieure constructive

Raison essentielle : ces axiomes utilisent des propriétés sur l'inégalité que ne vérifient pas les Ω-nombres. Cela est dû à de nombreux éléments irréguliers qui sont dans $\mathcal{HR}_\omega$ (par exemple : $((-n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

- Pour réduire ce problème,
    - on introduit la notion d'éléments réguliers (qui sont les images des suites de Cauchy),
    - on donne une forme "faible" aux axiomes précédents.

Un mot sur les aspects théorique

Formalisation avec Coq (Rocq)



Nicolas Magaud, Agathe Chollet, and Laurent Fuchs.
Formalizing a discrete model of the continuum in Coq from a discrete geometry perspective.
In Jürgen Richter-Gebert and Pascal Schreck, ed, *(ADG'2010)*, Munich, 2010.

Un mot sur les aspects théorique

Étude de sous-ensembles de $\mathcal{HR}_\omega$

- Les travaux de V. Ménissier-Morain
  - Permet de préciser la structure algébrique,
  - de lier la suite d'échelles avec la précision des calculs
  - d'avoir des algorithmes élémentaires "à une précision" donnée
- Les travaux de A. Ciaffaglione et P. Di Gianantonio
  - Travaux actuellement en cours pour comparer avec ce qui a été fait jusqu'à présent.

L. Mazo, M.-A. Da Col, L. Fuchs, N. Magaud and G. Skapin
Some representation of real numbers using integer sequences.
Mathematical Structures in Computer Science, 2022.

A. Ciaffaglione and P. Di Gianantonio.
A certified, corecursive implementation of exect real numbers.
Theoretical Computer Science, 2006.

V. Ménissier-Morain
Arbitrary precision real arithmetic: design and alogrithms.
Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, 64(1).2005